0.1 Simplicial set

Definition 0.1.1

$[n] = \{0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n\}$ という poset を考えたとき、Δ を $[n]$ を object、morphism を $[n] \longrightarrow [m]$ を poset map、つまり order preserving map とした category とする。このとき、functor

$$\Delta^{op} \longrightarrow Sets$$

を simplicial set と呼ぶ。

Remark 0.1.2

Δ の morphism、$[n] \longrightarrow [m]$ は injective の morphism と、surjective の morphism の合成に一意的に分解できる。これはさらに、$d^j : [n-1] \longrightarrow [n]$、$s^i : [n] \longrightarrow [n-1]$ で simplicial condition と呼ばれる条件を満たす morphism の合成として表せる。

これより、simplicial set $X : \Delta^{op} \longrightarrow Sets$ は、$n \geqq 0$ に対し集合 X_n と、$0 \leqq j \leqq n$ に対する face map $d_j : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ と $0 \leqq i \leqq n-1$ に対する degeneracy map $s_i : X_{n-1} \longrightarrow X_n$ で、

1. $d_i d_j = d_{j-1} d_i \qquad (i < j)$

2. $$d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & (i < j) \\ 1 & (i = j, i = j+1) \\ s_j d_{i-1} & (i > j+1) \end{cases}$$

3. $s_i s_j = s_{j+1} s_i \qquad (i > j-1)$

を満たすものである。

Example 0.1.3

1. S を集合としたとき、$CS : \Delta^{op} \longrightarrow Sets$ を $CS_n = S$ とし、face、degeneracy map を identity とした simplicial set を constant simplicial set of S と呼ぶ。特に $C\phi = \phi$、$C* = *$ と書く。これらは、simplicial set の category(as functor category) の inicial object と terminal object である。

2. $n \geqq 0$ に対し、$\Delta[n] : \Delta^{op} \longrightarrow Sets$ を $\Delta[n]_k = \mathrm{Hom}_\Delta([k],[n])$ で定義し、$f : [k] \longrightarrow [m]$ に対し、$f^* : \mathrm{Hom}_\Delta([m],[n]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Delta([k],[n])$ を対応させる。これを n-th standard complex と呼ぶ。また、$i_n \in \Delta[n]_n = \mathrm{Hom}_\Delta([n],[n])$ を identity map としておく。$\Delta^0 = *$ である。

3. $n \geqq 0$ に対し、$\partial\Delta[n]$ を $d_j(i_n)$、$0 \leqq j \leqq n$ で生成される $\Delta[n]$ の sub complex とする。つまり、

$$\partial\Delta[n]_k = \begin{cases} \Delta[n]_k & 0 \leqq k \leqq n-1 \\ 0 \leqq j \leqq n-1\text{、}\Delta[n]_j \text{ の face map の imege} & n \leqq k \end{cases}$$

これを、boundary of $\Delta[n]$ と呼ぶ。特に、$\partial\Delta[0] = \phi$ とする。

4. $n \geqq 0$、$0 \leqq m \leqq n$ に対し、Λ^n_m を $d_j(i_n)$、$0 \leqq j \leqq n$、$j \neq m$ で生成される $\Delta[n]$ の sub complex とする。これを、k-th horn of $\Delta[n]$ と呼ぶ。

5. X を位相空間としたとき、$S_*X : \Delta^{op} \longrightarrow Sets$ を、$S_nX = \mathrm{Hom}_{Space}(\Delta^n, X)$ で定義し、singular complex of X と呼ぶ。

6. C を small category としたとき、$N_*C : \Delta^{op} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ を、$N_nC = Funct([n], C)$ とおき、nerve of C と呼ぶ。

7. Ordered simplicial complex K に対し、$Sing_*(K) : \Delta^{op} \longrightarrow Sets$ を、$Sing_n(K) = \mathrm{Hom}_{OSC}(\Delta[n], K)$ と定義する。

Lemma 0.1.4

K を simplicial set としたとき、$\mathrm{Hom}_{SSet}(\Delta[n], K) \cong K_n$ である。

proof)　Yoneda lemma により示せる。一応示すと、natural transformation

$$\tau : \Delta[n] = \mathrm{Hom}_\Delta(-, [n]) \longrightarrow K$$

に対し、$\tau_n : \mathrm{Hom}_\Delta([n], [n]) \longrightarrow K_n$ であるので、$\tau \mapsto \tau_n(1) \in K_n$ を対応させる。

逆に、$x \in K_n$ に対し、$\sigma(x) : \Delta[n] \Longrightarrow K$ は、

$$\sigma(x)_m : \mathrm{Hom}_\Delta([m], [n]) \longrightarrow K_m$$

を、$f \mapsto K(f)(x)$ で定義すればこれで同型となる。

□

Corollary 0.1.5

X を simplicial set としたとき、X_0 の元を vertex と呼ぶ。Lemma 0.1.4 により、X_0 の元を取ることと、Simplicial map $* = \Delta^0 \longrightarrow X$ を決めることは同値である。より、一般に、simplicial map $\Delta[n] \longrightarrow K$ は、$i_n \in \Delta[n](n) = \mathrm{Hom}_\Delta([n], [n])$ の K_n への行き先で決まってしまう。同様に、simplicial map $\partial\Delta[n] \longrightarrow K$、$\Lambda^n_k \longrightarrow K$ も nondegenerate な $(n-1)$-simplex の K_{n-1} への simplicial condicition を満たす対応により決まる。

Definition 0.1.6　*Product and mapping space*

X, Y を simplicial set とする。simplicial set $X \times Y$ を

$$(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$$

で定義し、degenerate と face も product により定義する。また、$\mathrm{Map}(X, Y)$ を、

$$\mathrm{Map}(X, Y)_n = \mathrm{Hom}_{SSets}(X \times \Delta[n], Y)$$

で定義し、$\tau : [k] \longrightarrow [n]$ に対し、$\tau_* : \Delta[k] \longrightarrow \Delta[n]$ が induce されるので、$\mathrm{Map}(X, Y)_n \longrightarrow \mathrm{Map}(X, Y)_k$ は、

$$(1 \times \tau_*)^* : \mathrm{Hom}_{SSets}(X \times \Delta[n], Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{SSets}(X \times \Delta[k], Y)$$

として定義できる。

Definition 0.1.7

X, Y を simplicial set としたとき、evaluation map

$$ev : \mathrm{Map}(X, Y) \times X \longrightarrow Y$$

を次のように定義する。

$$ev_n : \mathrm{Hom}_{SSets}(X \times \Delta[n], Y) \times X_n \longrightarrow Y_n$$

は、$ev_n(f, x) = f_n(x, i_n)$ により定義する。

Lemma 0.1.8

$ev : \mathrm{Map}(X, Y) \times X \longrightarrow Y$ は simplicial map である。

proof)　　d_j, s_i について可換になっているかを見てみればよい。d_j について考えると、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(X,Y)_n \times X_n \arrow[r, "ev"] \arrow[d] & Y_n \arrow[d, "d_j"] \\
\mathrm{Map}(X,Y)_{n-1} \times X_{n-1} \arrow[r, "ev"'] & Y_{n-1}
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいので、

$$\begin{aligned}
ev \circ d_j(f, x) &= ev(d_j f, d_j x) \\
&= ev(f \circ (1 \times d^j), d_j x) \\
&= (f \circ (1 \times d^j))(d_j x, i_{n-1}) \qquad d^j i_{n-1} = d_j i_{n-1} \\
&= f(d_j x, d_j i_n) \\
&= d_j f(x, i_n) = d_j \circ ev(f, x)
\end{aligned}$$

となる。s_i についても同様である。

□

Corollary 0.1.9

$ev : \mathrm{Map}(X, Y) \times X \longrightarrow Y$ は X, Y について natural である。つまり、$\alpha : Z \longrightarrow X$、$\beta : Y \longrightarrow W$ に対し、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(X,Y) \times X \arrow[r, "ev"] & Y \arrow[dd, "\beta"] \\
\mathrm{Map}(X,Y) \times Z \arrow[u, "1\times\alpha"] \arrow[d, "\beta_*\alpha^*\times 1"'] & \\
\mathrm{Map}(Z,W) \times Z \arrow[r, "ev"'] & W
\end{tikzcd}$$

は可換である。

proof)　　$(f,z) \in \mathrm{Map}(X,Y)_n \times Z_n$ に対し、

$$\beta \circ ev \circ (1 \times \alpha)(f,z) = \beta \circ ev(f, \alpha(z)) = \beta(f(\alpha(z), i_n))$$

である。一方、

$$ev \circ (\beta_* \alpha^* \times 1)(f,z) = ev(\beta \circ f \circ \alpha, z) = (\beta \circ f \circ \alpha)(z, i_n) = \beta(f(\alpha(z), i_n))$$

となる。

$\square$

Theorem 0.1.10　*Exponential Low*

X, Y, Z : simplicial set に対し、

$$ev_* : \mathrm{Hom}_{SSets}(X, \mathrm{Map}(Y,Z)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{SSets}(X \times Y, Z)$$

を、$ev_*(g) = ev \circ (g \times 1_Y)$ で定義する。ただし、$g \times 1_Y : X \times Y \longrightarrow \mathrm{Map}(X,Y) \times Y$。このとき、$ev_*$ は X, Y, Z に関して natural な全単射である。

proof)　　naturality は ev の naturality から導かれる。ev_* の inverse

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{SSets}(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{SSets}(X, \mathrm{Map}(Y,Z))$$

を次のように定義する。$f \in \mathrm{Hom}_{SSets}(X \times Y, Z)$ に対し、

$$\alpha(f)_n : X_n \longrightarrow \mathrm{Map}(Y,Z)_n = \mathrm{Hom}_{SSets}(Y \times \Delta[n], Z)$$

は、

$$\alpha(f)_n(x) : Y \times \Delta[n] \xrightarrow{1 \times i_x} Y \times X \cong X \times Y \xrightarrow{f} Z$$

により定義する。ただし、$i_x : \Delta[n] \longrightarrow X$ は、$i_n \mapsto x \in X_n$ により定義される。これは ev_* の inverce になっている。

$\square$

Corollary 0.1.11

$SSets$ は symmetric closed monoidal category である。